Herleitung der Schwingungsgleichung für gedämpfte Schwingungen

Den Quotienten zweier aufeinander folgender Amplituden einer gedämpften Schwingung $\boldsymbol{\frac{\hat{y}_{n+1}}{\hat{y}_n}}$ bezeichnet man als **Dämpfungsquotienten $\boldsymbol{q}$.**
Der Dämpfungsquotient ist von der Periodendauer der Schwingung unabhängig und bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung konstant.

Mit $q = \frac{\hat{y}_{n+1}}{\hat{y}_n}$ ergibt sich für die Amplitude der 1. Periode $\hat{y}_1 = \hat{y}_0 \cdot q$,

für die der 2. Periode $\hat{y}_2 = \hat{y}_1 \cdot q = \hat{y}_0 \cdot q^2$

und damit allgemein für die der n-ten Periode $\boxed{\boldsymbol{\hat{y}_n = \hat{y}_0 \cdot q^n}}$

Den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Amplituden bezeichnet man als **logarithmisches Dekrement $\boldsymbol{\delta}$** (Dekrement = Abnahme, Verfall):

$$\delta = ln\frac{\hat{y}_n}{\hat{y}_{n+1}}$$

Beachte: *Hier steht **über** dem Bruchstrich $\hat{y}_n$, damit ist $\boldsymbol{\delta = ln\frac{1}{q}}$.*

*Der Quotient ist also immer **größer** als 1 und $\boldsymbol{\delta}$ damit immer **positiv**.*

Durch **Entlogarithmieren** ergibt sich für zwei aufeinander folgende Amplituden

$\frac{\hat{y}_n}{\hat{y}_{n+1}} = e^{\boldsymbol{\delta}}$ und damit $\frac{\hat{y}_{n+1}}{\hat{y}_n} = q = e^{-\boldsymbol{\delta}}$.

Für die n-te Periode gilt: $\boldsymbol{\frac{\hat{y}_n}{\hat{y}_0} = e^{-\delta \cdot n}}$ (wegen $ln\frac{\hat{y}_n}{\hat{y}_0} = -n \cdot \delta$)

Die Amplitude der n-ten Schwingung ist damit (unabhängig von der Periodendauer T)

$\boxed{\boldsymbol{\hat{y}_n = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta \cdot n}}}$ **Gleichung 1**

Die **Dämpfungskonstante k** ist ein Maß für die Abnahme der Amplitude mit der Zeit t (unabhängig von der Anzahl der Perioden).

Sie ergibt sich aus dem Quotienten von **δ** und **T**: $k = \frac{\delta}{T}$

Mit $\boldsymbol{\delta = ln\frac{\hat{y}_n}{\hat{y}_{n+1}}}$ (s.o.) lässt sich k also berechnen: $k = \frac{ln\left(\frac{\hat{y}_n}{\hat{y}_{n+1}}\right)}{T}$.

Multipliziert man in **Gleichung 1** den Exponenten mit $\frac{T}{T} = 1$**,** ergibt sich

$\hat{y}_n = \hat{y}_0 \cdot e^{-\frac{\delta}{T} \cdot n \cdot T}$ wobei **n·T** gerade die seit Beginn der Schwingung vergangene Zeit **t** ist.

Ersetzt man außerdem $\frac{\delta}{T}$ durch **k**, erhält man die Funktionsgleichung für die Amplitudenabnahme mit der Zeit (die Funktionsgleichung für die Einhüllende):

$$\boxed{\hat{y}(\mathrm{t}) = \hat{y}_0 \cdot e^{-kt}}$$

Setzt man nun diese zeitabhängige Amplitude in das Weg-Zeit-Gesetz für harmonische Schwingungen ein, indem man **ŷ** durch $\hat{y}(\mathrm{t}) = \hat{y}_0 \cdot e^{-kt}$ ersetzt, erhält man die

Zeit-Elongationsgleichung der gedämpften Schwingung:

$$\boxed{y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-kt} \cdot \sin \omega t}$$

(für **y = 0** bei **t = 0**)

bzw.

$$\boxed{y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-kt} \cdot \cos \omega t}$$

(für **y =** $\hat{y}_0$ bei **t = 0**)

Die Halbwertszeit

Nach der *Halbwertszeit* t_H ist die Amplitude auf die Hälfte gesunken.

Es gilt also: $\hat{y}(t_H) = \frac{\hat{y}_0}{2}$ und damit $\hat{y}_0 \cdot e^{-k \cdot t_H} = \frac{1}{2} \hat{y}_0$

Dividiert man die Gleichung durch $\hat{y}_0$ und logarithmiert sie anschließend, erhält man

$e^{-k \cdot t_H} = \frac{1}{2}$ bzw. $-k \cdot t_H = ln \frac{1}{2}$ oder $k \cdot t_H = ln2$

Nun dividiert man die Gleichung durch die Dämpfungskonstante und erhält damit die Halbwertszeit:

Die Halbwertszeit beträgt $\boldsymbol{t_H = \frac{ln2}{k}}$